**第七周习题课 极值，含参积分**

**一．无条件极值**

1. 求函数的所有局部极值.

解 求偏导数得，解  ,

得到9个驻点：

 

求二阶偏导数得



在上述每个点计算得到下表：

 由极值的充分条件可知，函数在点取局部极小值，



取局部极大值，其它点均为鞍点（非极值点）.

1. 求函数的极值．

解：　　　　　　　　　 



驻点为与曲线上的所有的点．在点，



点是极小值点，极小值为．

设，，是其驻点，且，函数在曲线上取到极大值．

1. （隐函数的极值）设由确定，求该函数的极值．

解：　　　　　　　　







三个方程联立，得驻点．

　　在点



且，点是极小值点；

　　在点



且，点是极大值点．

**二．条件极值**

1. 求原点到曲面的最短距离．

解：这个问题可看作条件极值问题：。

我们用Lagrange乘子法来直接求解这个问题。作Lagrange函数。令



由上述第三个方程可知或. 讨论如下：

情形。 联立前两个方程得 。不难解得唯一的解：,。

将,代入第四个方程得。这就得到问题的两个驻点 和.

情形。 联立前两个方程得 。

1. 当时，容易解得。代入方程 得。无实数解。
2. 当时，由方程组  立刻得到

。即。代入方程 得。其解为。由此得到两个驻点： ，。

综上我们得到四个驻点：，，，。

这四个点与原点的距离分别为，，，。容易验证，这四个之的最小值是.因此，曲面上的两个点和与原点的距离是所求得最

短距离。解答完毕。

1. 当，，时，求函数在球面上的最大值，这里. 由此进一步证明，对于任意正实数，下述不等式成立 ．

解：令 ,

, , , .

解方程组 ,,得。

将它们代入球面方程得。

这就得到函数的唯一驻点。

可以证明函数在球面上的最大值在点处取得。（严格证明有点麻烦，已超出了本课程对同学们的要求。可类似于课本第90页中例1.9.4，作个直观的说明。）

所以函数在球面上的最大值为 。

.

，

两边平方得

所以对任意正数有。证毕。

1. 求抛物面  与平面  的交线（椭圆）的长轴、短轴的长．

解: 设，为椭圆上的两点,



这是条件极值问题,



求出驻点, 由几何意义可知存在最小值. 太多的约束条件，具体就不解了。

问题：

**三．多元函数的最大值、最小值及其简单应用**

1. 求在所围闭区域上的最大值．

解：（１）先求开区域内的最大值．



驻点，在内的驻点为．

（２）三条边界上的驻点







将代入



在边界上的驻点为，经检验，这个点在的边界上．

将代入，



不必考虑．

作拉格伦日函数　　　



驻点在的边界上．

　　现有驻点，加上三个角点．函数在有界闭区域上连续，必有最大值，而且最大值必为上述六个点之一．计算函数在六个点上的值，



最大；



最小．

1. 设在上有二阶连续偏导数，在内满足，且在上， ，证明：当时， 。（提示：可用反证法证明）

证明：反证法：假设存在点满足且。

由条件：在上， 可知，在上的连续函数在区域的最小值点一定发生在区域的内部，因此一定是极小值点，矩阵正定或半正定，这与



矛盾。假设不成立，即当时， 。

1. 函数在有界闭区域上连续，在D内部偏导数存在,在的边界上的值为零，在内部满足，其中是严格单调函数，且，

证明 .

证明：假设不恒为0，不妨设其在区域上某点P处取极大值，则有，这与是严格单调函数矛盾。

1. 假设有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

.

求证原点是的唯一极小值点．并且满足．

证明：

①证明原点之外任意点都不是驻点，从而不是极值点．

任意固定，由题目条件推出．于是

在点沿方向的方向导数不等于零．从而不是驻点．

②证明原点是驻点．

对于任意的，考察点．由题目条件推出，进而推出．令，因为偏导数连续，所以由极限保号性推出

由题目条件又可以推出在点满足．进而推出．令，又得到．

由和推出．同样的方法又可以推出．因此原点是驻点．

③证明是极小值．

任取，现在证明．

考察线段．由题目条件又可以推出在上任意一点，沿方向的方向导数大于零．从而沿方向是单调增加的，从而．

证毕．

④证明．

注意到有连续的偏导数，．所以．

函数增量与微分之差是的高阶无穷小量，于是结论得证．

1. 设, 满足。 求函数在平面第一象限,里 满足约束条件的最小值。 由此进一步证明Young不等式 ，。

（注：这是课本第一章总复习题第16题，page 97。 在一元微分学里，我们已经学习过利

用极值理论证明一些不等式。 利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题

就是一个很好的例子。)

解：考虑条件极值问题，，,。

作Lagrange函数。 解方程组，，，

即解方程组



在第一象限,的解。不难解得方程组有唯一解,,.

由于函数在双曲线上的函数值趋于正无穷，当, 或。

因此函数在双曲线的最小值点就是,,最小值为1。

以下我们来证明Young不等式。要证，，即要证

。

记, ，则.

根据第一部分条件极值的结论得。此即。 这表明Young不等式成立。证毕。